MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME PARTIE

DURÉE : 2 heures

Nomenclature :

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels.

$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers strictement positifs.

$C^n[a, b]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ désigne l'ensemble des fonctions admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n continues sur l'intervalle $[a, b]$.

$C[a, b]$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$.

PREMIÈRE PARTIE

Soit p, q et f trois fonctions de la variable réelle x définies sur un intervalle $[a, b]$ où $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $a < b$. Soit $p_0 \in \mathbb{R}$.

On suppose de plus que :

(1) $p \in C^1[a, b]$ et $(\forall x \in [a, b] \quad p(x) \geqslant p_0 > 0)$

(2) $q \in C[a, b]$ et $(\forall x \in [a, b] \quad q(x) \geqslant 0)$

(3) $f \in C^1[a, b]$

On se propose de déterminer, toutes les fonctions $y \in C^2[a, b]$ telles que :

(4) $$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right) + q(x)\,y(x) = f(x) \qquad a < x < b$$

(5) $$y(a) = y(b) = 0.$$

On admettra que sous les conditions (1), (2) et (3), l'équation différentielle (4) munie des conditions aux limites (5) possède au moins une solution.

On considère deux éléments α et β de $C[a, b]$ et l'on définit le produit scalaire $<\alpha, \beta>$ par l'intégrale :

$$<\alpha, \beta> = \int_a^b \alpha(x)\ \beta(x)\ dx$$

Soit E l'espace vectoriel constitué par les éléments $u \in C^2[a, b]$ et tels que $u(a) = u(b) = 0$ et soit L l'application linéaire de E sur $C[a, b]$ définie pour tout élément u de E par la relation :

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du}{dx}\right) + qu$$

1° On pose :

$$[u, v] = <u, Lv> \qquad \text{pour tout couple } (u, v) \in E \times E$$

Démontrer que $[u, v] = [v, u]$

2° Montrer que :

$$[u, u] > 0 \qquad \text{pour tout } u \neq 0 \text{ où } u \in E$$

$$[u, u] = 0 \Leftrightarrow u = 0, \quad \text{pour tout } u \in E$$

Démontrer alors que l'équation (4) munie des conditions (5) admet une solution unique, notée y dans toute la suite du problème, telle que :

$$[u, y] = <u, f> \quad \text{pour tout } u \in E$$

(On rappelle que la démonstration de l'existence de cette solution n'est pas demandée.)

DEUXIÈME PARTIE

On définit, pour tout élément u de E, la relation :

$$F(u) = [u, u] - 2 <u, f>$$

Soit v et w deux éléments de E (w non nul) et γ un réel quelconque.

1° Soit u l'élément de E égal à la somme :

$$u = v + \gamma w$$

Établir la relation :

$$F(u) = F(v) + 2\gamma <Lv - f, w> + \gamma^2 [w, w]$$

En déduire que :

$$F(u) > F(y) \quad \text{pour tout } u \in E \text{ tel que } u \neq y.$$

2° Réciproquement, supposons qu'il existe un élément unique $z \in E$ rendant F minimum. On pose :

$u = z + \gamma w$ où γ est un réel quelconque non nul et w un élément non nul de E.

Étudier alors le signe de

$$2\gamma <Lz - f, w> + \gamma^2 [w, w]$$

En déduire, après avoir justifié tous les calculs, que :

$$Lz = f$$

Tournez la page S. V. P.

page 126 1986 E.N.S.I. de Chimie Groupe Centre Math 2

TROISIÈME PARTIE

Soit E_n un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$), de base $B_n = \{u_1, u_2, \ldots u_n\}$.

Soit v un élément de E_n, de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ dans la base B_n :

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

On se propose de déterminer un élément y_n de E_n approximant la solution exacte y des équations (4) et (5), et rendant minimum dans E_n la fonction F :

$$F(y_n) = \min_{v \in E_n} F(v)$$

1° Développer F (v) par rapport aux composantes x_i de v dans la base B_n.

2° On définit les vecteurs V, Φ et la matrice carrée A d'ordre n par les relations :

$$\Phi = \begin{pmatrix} < u_1, f > \\ \vdots \\ < u_n, f > \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} [u_1, u_1] \ldots\ldots\ldots [u_1, u_n] \\ \vdots \quad \ddots \quad \ddots \quad \vdots \\ [u_n, u_1] \ldots\ldots\ldots [u_n, u_n] \end{pmatrix}$$

de telle sorte que :

$$F(v) = {}^tVAV - 2\,{}^t\Phi V$$

Montrer que ${}^tVAV > 0$ pour tout V non nul. En déduire que la matrice A est inversible.

3° Soit Y_n la solution du système linéaire :

$$AY_n = \Phi$$

Soit y_n l'élément de E_n dont les composantes dans la base B_n sont représentées par la matrice colonne Y_n.

Démontrer que, quel que soit $v \in E_n$, distinct de y_n :

$$F(v) > F(y_n)$$

QUATRIÈME PARTIE

Application numérique :

On considère l'équation différentielle :

$$(6) \qquad -\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + y(x) = 1 \qquad 0 < x < 1$$

$$(7) \qquad y(0) = y(1) = 0$$

1° Déterminer la solution y de cette équation, pour les conditions (7).

2° On considère le sous-espace vectoriel E_{2m+1} ($m \in \mathbb{N}^*$) de E de base :

$$u_k = \sin k\pi x \qquad k = 1, 2, \ldots, 2m + 1$$

Expliciter la matrice A et le vecteur Φ relatif à l'exemple considéré.

En déduire une solution approchée y_{2m+1} des équations (6) et (7).

Établir un tableau donnant les valeurs numériques de y et y_3 pour $x = \frac{K}{10}$ (K = 0, 1, ..., 10) et leurs écarts relatifs.

E.N.S.I. de chimie
Groupe Centre.Math 2
1986
page 127